ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

LẠI THANH LOAN

VẤN ĐỀ DUY NHẤT CỦA HÀM PHÂN HÌNH CHUNG NHAU BA TẬP HỢP

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2016

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

LẠI THANH LOAN

VẤN ĐỀ DUY NHẤT CỦA HÀM PHÂN HÌNH CHUNG NHAU BA TẬP HỢP

Chuyên ngành: TOÁN GIẢI TÍCH
Mã số: 60.46.01.02

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Hướng dẫn khoa học
PGS.TS.HÀ TRẦN PHƯƠNG

THÁI NGUYÊN - 2016

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan đây là công trình nghiên cứu của riêng tôi. Các kết quả nêu trong luận văn là trung thực và chưa từng được ai công bố trong bất kì công trình nào khác. Tài liệu tham khảo và nội dung trích dẫn đảm bảo sự trung thực và chính xác, tuân thủ các qui định về quyền sở hữu trí tuệ.

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2016

Tác giả

Lại Thanh Loan

Lời cảm ơn

Trước khi trình bày nội dung chính của luận văn, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới **PGS.TS Hà Trần Phương**, người thầy tận tình hướng dẫn tôi trong suốt quá trình nghiên cứu để tôi có thể hoàn thành luận văn này.

Tôi xin trân trọng cảm ơn Ban Giám hiệu, khoa Toán cùng toàn thể các thầy cô giáo trường ĐHSP Thái Nguyên, Viện Toán học và Trường Đại học Sư phạm Hà Nội đã truyền thụ cho tôi những kiến thức quan trọng, tạo điều kiện thuận lợi và cho tôi những ý kiến đóng góp quý báu trong suốt quá trình học tập và thực hiện luận văn.

Cuối cùng, tôi xin gửi lời cảm ơn tới gia đình, bạn bè những người đã giúp đỡ và chia sẻ với tác giả trong suốt thời gian học tập và hoàn thành luận văn của mình.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, tháng 4 năm 2016

Tác giả

Lại Thanh Loan

Mục lục

Mở đầu

Năm 1929, R. Nevanlinna chứng minh hai định lí nổi tiếng về vấn đề duy nhất cho các hàm phân hình, thường được gọi là Định lý năm điểm và Định lý bốn điểm. Về sau có rất nhiều nhà toán học đã mở rộng những kết quả của Nevanlinna cho những trường hợp khác nhau: hàm phân hình chung nhau các tập điểm, kể cả bội, không kể bội,....

Cho f là một hàm phân hình, $a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Kí hiệu $E(a, f)$ là tập các không điểm kể cả bội của $f - a$, $\overline{E}(a, f)$ là tập các không điểm phân biệt của $f - a$. Cho $S \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ là tập hợp các phần tử khác nhau. Kí hiệu

$$E_f\left(S\right) = \cup_{a \in S} E(a, f); \quad \overline{E}_f\left(S\right) = \cup_{a \in S} \overline{E}(a, f).$$

R. Nevanlinna đã chứng minh, nếu hai hàm phân hình khác hằng f, g thỏa mãn

$$\overline{E}\left(a_i, f\right) = \overline{E}\left(a_i, g\right) \qquad \forall i = \overline{1, 5},$$

trong đó a_i là các giá trị phân biệt, thì f và g phải trùng nhau.

Vào năm 1976, H. Yi ([15]) đã đặt ra câu hỏi: Có thể tìm thấy hay không ba tập hữu hạn S_j $(j = 1, 2, 3)$ sao cho bất kì hai hàm phân hình thỏa mãn $E\left(S_j, f\right) = E\left(S_j, g\right)$ với $j = (1, 2, 3)$ thì $f \equiv g$?. Vào năm 1994, H. Yi ([15]) đã đưa ra một số kết quả để trả lời cho câu hỏi đặt ra.

Với mục đích tìm hiểu một số kết quả nghiên cứu theo hướng này, chúng tôi chọn đề tài **"Vấn đề duy nhất của hàm phân hình chung nhau ba tập hợp"**. Mục đích chính của luận văn là trình bày lại một số kết quả nghiên cứu của H. Yi ([16], [20]), W. C. Lin và H. Yi ([6]) về các điều kiện xác định duy nhất hàm phân hình chung nhau ba giá trị, ba tập hợp. Luận văn chia thành hai chương:

Chương 1: *Một số kiến thức cơ bản*, trình bày những kiến thức cơ sở, cần thiết cho việc chứng minh những kết quả trong Chương 2 như: lý thuyết phân bố giá trị Nevanlinna cho hàm phân hình chung nhau ba giá trị, ba tập hợp.

Chương 2: *Vấn đề duy nhất của hàm phân hình chung nhau ba tập hợp*, trình bày về hàm phân hình chung nhau ba giá trị kể cả bội và chung nhau có trọng số; trình bày lại chứng minh một số điều kiện đủ về tính duy nhất của hàm phân hình chung nhau ba tập hợp.

Chương 1

Một số kiến thức chuẩn bị

1.1. Lý thuyết Nevanlinna cho hàm phân hình

1.1.1. Các hàm Nevanlinna và tính chất

Trong luận văn này chúng ta luôn kí hiệu $\mathbb{C}$ là trường các số phức. Ta kí hiệu các tập

$$D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\},$$
$$\overline{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \le r\},$$
$$\partial D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\},$$

lần lượt là hình tròn, hình tròn đóng, đường tròn tâm z_0, bán kính $r > 0$. Đặc biệt, khi $z_0 = 0$, ta kí hiệu ngắn gọn

$$\overline{D}_R = \overline{D}(0, R); \qquad D_R = D(0, R).$$

Cho f là hàm chỉnh hình trên mặt phẳng phức $\mathbb{C}$, điểm z_0 được gọi là *không điểm bội k* của f nếu tồn tại một hàm chỉnh hình $h(z)$ không triệt tiêu trong một lân cận U của z_0 sao cho trong lân cận đó hàm f được biểu diễn dưới dạng:

$$f(z) = (z - z_0)^k h(z).$$

Điều này kéo theo $f(z_0) = f'(z_0) = \ldots = f^{(k-1)}(z_0) = 0$ và $f^{(k)}(z_0) \neq 0$.

Với $z \in \mathbb{C}$, khi z là không điểm bội k của hàm f thì ta kí hiệu $\mathrm{ord}_f(z) = k$, trong các trường hợp khác $\mathrm{ord}_f(z) = 0$.

Cho f là một hàm phân hình trên mặt phẳng phức $\mathbb{C}$, khi đó $f = \dfrac{f_1}{f_2}$, trong đó f_1, f_2 là các hàm chỉnh hình. Một điểm z_0 gọi là *không điểm bội* k của f nếu z_0 là không điểm bội k của f_1, z_0 gọi là *cực điểm bội* k của f nếu z_0 là không điểm bội k của f_2.

Với mỗi số thực $x > 0$, kí hiệu:

$$\log^+ x = \max\{\log x, 0\}.$$

Khi đó $\log x = \log^+ x - \log^+ \frac{1}{x}$.

Bây giờ ta định nghĩa hàm đếm, hàm xấp xỉ, hàm đặc trưng của một hàm phân hình. Cho f là một hàm phân hình trên $\overline{D}_R$ và một số thực $r > 0$, trong đó $0 < R \leq \infty, r < R$. Dễ thấy:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f(re^{i\varphi})\right| d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+\left|f(re^{i\varphi})\right| d\varphi - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+\left|\frac{1}{f(re^{i\varphi})}\right| d\varphi.$$

Định nghĩa 1.1. Hàm

$$m(r, f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+\left|f(re^{i\varphi})\right| d\varphi,$$

được gọi là *hàm xấp xỉ* của hàm f. Với một số phức a, ta kí hiệu

$$m\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f\left(re^{i\varphi}\right) - a|} d\varphi.$$

Cho k là một số nguyên dương, ta kí hiệu $n(r, 1/f)$ là số không điểm kể cả bội của f; $\overline{n}(r, 1/f)$ là số không điểm không kể bội của f; $n(r, f)$ là số cực điểm kể cả bội của f; $\overline{n}(r, f)$ là số cực điểm không kể bội của f; $n_k(r, f)$ là số cực điểm bội cắt cụt bởi k của f (tức là cực điểm bội $l > k$ chỉ được tính k lần trong tổng $n_k(r, f)$) trong $\overline{D}_r$.

Định nghĩa 1.2. Hàm

$$N(r, f) = \int_0^r \frac{n(t, f) - n(0, f)}{t} dt + n(0, f) \log r,$$

được gọi là *hàm đếm kể cả bội* của f (còn gọi là hàm đếm tại các cực điểm). Hàm

$$\overline{N}(r,f)=\int\limits_0^r \frac{\overline{n}(t,f)-\overline{n}(0,f)}{t}dt+\overline{n}(0,f)\log r,$$

được gọi là *đếm không kể bội*. Hàm

$$N_k(r,f)=\int\limits_0^r \frac{n_k(r,f)-n_k(0,f)}{t}+n_k(0,f)\log r,$$

được gọi là *hàm đếm bội cắt cụt* bởi k, trong đó $n(0,f)=\lim\limits_{t\to 0}n(t,f)$; $\overline{n}(0,f)=\lim\limits_{t\to 0}\overline{n}(t,f)$; $n_k(0,f)=\lim\limits_{t\to 0}n_k(r,f)$. Số k trong $n_k(r,f)$ được gọi là *chỉ số bội cắt cụt.*

Cho $f(z)$ là một hàm phân hình khác hằng. Ta kí hiệu $S(r,f)$ là đại lượng thỏa mãn $S\left(r,f\right)=o\left(T\left(r,f\right)\right)$ $\left(r\to\infty,r\notin E\right)$. Với một số phức a, một số nguyên dương k, ta kí hiệu $n_{k)}\left(r,\frac{1}{f-a}\right)$ là hàm đếm số không điểm của $f-a$ trong $\overline{D}_r$ mà bội của không điểm không lớn hơn k, kể cả bội; $\overline{n}_{k)}\left(r,\frac{1}{f-a}\right)$ là hàm đếm số không điểm của $f-a$ trong $\overline{D}_r$ mà bội của không điểm không lớn hơn k và chỉ đếm 1 lần; $n_{(k+1}\left(r,\frac{1}{f-a}\right)$ là hàm đếm số không điểm của $f-a$ trong $\overline{D}_r$ mà bội của không điểm lớn hơn k, kể cả bội; $\overline{n}_{(k+1}\left(r,\frac{1}{f-a}\right)$ là hàm đếm số không điểm của $f-a$ trong $\overline{D}_r$ mà bội của không điểm lớn hơn k và chỉ đếm một lần. Kí hiệu

$$\begin{aligned}N_{k)}\left(r,a,f\right)=N_{k)}\left(r,\frac{1}{f-a}\right)&=\int\limits_0^r \frac{n_{k)}\left(t,\frac{1}{f-a}\right)-n_{k)}\left(0,\frac{1}{f-a}\right)}{t}dt\\&\quad+n_{k)}\left(0,\frac{1}{f-a}\right)\log r,\\N_{(k+1}\left(r,a,f\right)=N_{(k+1}\left(r,\frac{1}{f-a}\right)&=\int\limits_0^r \frac{n_{(k+1}\left(t,\frac{1}{f-a}\right)-n_{(k+1}\left(0,\frac{1}{f-a}\right)}{t}dt\\&\quad+n_{(k+1}\left(0,\frac{1}{f-a}\right)\log r\end{aligned}$$